L.7.11 Sahline

A.S :2007/2008

Devoir de synthèse N°2

Durée : 3.h

Exercice N°1: (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

1/a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2/a) Etudier les variations de la fonction $g(x)=f(x)-x$. (remarquer que : $e^{2x}-2e^x+1=(e^x-1)^2$)

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution a sur $\mathbb{R}$ et que $a\in\left]2;3\right[$

3/a) Montrer que $\forall x\in\left]2;3\right[$ on a : $|f'(x)|\leq 0,5$

b) En déduire que $\forall\ x\in\left[2;3\right]$ on a : $|f(x)-a|\leq 0,5.|x-a|$

4/ Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} V_0=3 \\ V_{n+1}=f(V_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$: $2\leq V_n\leq 3$

b) Montrer que : $|V_{n+1}-a|\leq 0,5.|V_n-a|$

c) Déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$: $|V_n-a|\leq(0,5)^n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$

Exercice N°2: (3pts)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $A(3,0,1)$; $B(2,-1,0)$; $C(3,4,-2)$ et $D(1,1,1)$

1/ Calculer : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. En déduire l'aire du triangle ABC

2/a) Montrer que les points A ; B ; C et D ne sont pas coplanaires.

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD

3/ Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{DM}=0$

Exercice N°3: (6 pts)

1/ Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = x\ln(x^2) - 2x$

a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0$

b) Etudier les variations de h

c) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que : $2.7 < \alpha < 2.8$

d) En déduire que : si $0 < x < \alpha$ on a : $h(x) < 0$

si $x > \alpha$ on a $h(x) > 0$

2/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x) - (1.5)x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Soit (ζ_f) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat

b) Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = h(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Tracer (ζ_f)

Exercice N°4: (6pts)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \xi$ tel que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

1/ Montrer que S est la sphère de centre $\Omega(2,-3,0)$ et de rayon R = 4

2/ Soit P_m le plan dont une équation cartésienne est : $2x + y + 2z - m = 0$

a) Calculer la distance $d(\Omega, P_m)$

b) Déterminer la position relative de S et P_0. Caractériser $S \cap P_0$

c) Montrer qu'il existe deux valeurs de m pour les quelles P_m est tangente à la sphère S

3/ Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 \\ z = 3 - 2\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Calculer la distance $d(\Omega, \Delta)$

b) Déduire la position relative de S et Δ. Caractériser $S \cap \Delta$